Учреждение Образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информационных технологий

Лабораторная работа № 6

**«Транспортная задача»**

По дисциплине

«Математическое программирование»

Выполнила:

Студентка ФИТ

Специальности ИСиТ 2 курса 2 группы

Максимова Вера Владимировна

Вариант 3

Минск 2022

**Транспортная задача**

**Цель работы:** приобретение навыков решения открытой транспортной задачи.

**Задание.** Решить транспортную задачу. Имеется 5 поставщиков продукции и 6 потребителей. Величина запасов, потребностей и стоимость затрат на перевозку продукции взять в соответствии с вариантом 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | **15** | **5** | **9** | **6** | **14** | **4** | **171** |
| 2 | **13** | **3** | **11** | **8** | **10** | **16** | **116** |
| 3 | **4** | **8** | **14** | **11** | **5** | **14** | **153** |
| 4 | **7** | **13** | **13** | **6** | **16** | **5** | **162** |
| 5 | **6** | **14** | **12** | **3** | **13** | **7** | **103** |
| ПОТРЕБНОСТИ | **146** | **110** | **134** | **196** | **98** | **166** |  |

**Проверка задачи на закрытость**

Обозначим суммарный запас груза у всех поставщиков символом A, а суммарную потребность в грузе у всех потребителей – символом B. Тогда: Транспортная задача называется закрытой, если A = B. Если же A ≠ B, то транспортная задача называется открытой. В случае закрытой задачи от поставщиков будут вывезены все запасы груза, и все заявки потребителей будут удовлетворены. В случае открытой задачи для ее решения придется вводить фиктивных поставщиков или потребителей.

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

∑А = 171 + 116 + 153 + 163 + 103 = 705

∑В = 146 + 110 + 134 + 196 + 98 + 166 = 850

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу с запасом груза, равным 145 (705—850). Тарифы перевозки единицы груза из базы во все магазины полагаем равны нулю.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | **15** | **5** | **9** | **6** | **14** | **4** | **171** |
| 2 | **13** | **3** | **11** | **8** | **10** | **16** | **116** |
| 3 | **4** | **8** | **14** | **11** | **5** | **14** | **153** |
| 4 | **7** | **13** | **13** | **6** | **16** | **5** | **162** |
| 5 | **6** | **14** | **12** | **3** | **13** | **7** | **103** |
| 6 | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **145** |
| ПОТРЕБНОСТИ | **146** | **110** | **134** | **196** | **98** | **166** |  |

**Поиск первого опорного плана.**

**Шаг 1.**

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.

Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c22=3. Для этого элемента запасы равны 116, потребности 110. Поскольку минимальным является 110, то вычитаем его.

x22 = min(116,110) = 110.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | 15 | - | 9 | 6 | 14 | 4 | 171 |
| 2 | 13 | **3** | 11 | 8 | 10 | 16 | **116 - 110 = 6** |
| 3 | 4 | - | 14 | 11 | 5 | 14 | 153 |
| 4 | 7 | - | 13 | 6 | 16 | 5 | 162 |
| 5 | 6 | - | 12 | 3 | 13 | 7 | 103 |
| 6 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 146 | **110 - 110 = 0** | 134 | 196 | 98 | 166 |  |

Искомый элемент равен c54=3. Для этого элемента запасы равны 103, потребности 196. Поскольку минимальным является 103, то вычитаем его.

x54 = min(103,196) = 103

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | 15 | - | 9 | 6 | 14 | 4 | 171 |
| 2 | 13 | 3 | 11 | 8 | 10 | 16 | 6 |
| 3 | 4 | - | 14 | 11 | 5 | 14 | 153 |
| 4 | 7 | - | 13 | 6 | 16 | 5 | 162 |
| 5 | - | - | - | **3** | - | - | **103 - 103 = 0** |
| 6 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 146 | 0 | 134 | **196 - 103 = 93** | 98 | 166 |  |

Искомый элемент равен c16=4. Для этого элемента запасы равны 171, потребности 166. Поскольку минимальным является 166, то вычитаем его.

x16 = min(171,166) = 166.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | 15 | - | 9 | 6 | 14 | **4** | **171 - 166 = 5** |
| 2 | 13 | 3 | 11 | 8 | 10 | - | 6 |
| 3 | 4 | - | 14 | 11 | 5 | - | 153 |
| 4 | 7 | - | 13 | 6 | 16 | - | 162 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 146 | 0 | 134 | 93 | 98 | **166 - 166 = 0** |  |

Искомый элемент равен c31=4. Для этого элемента запасы равны 153, потребности 146. Поскольку минимальным является 146, то вычитаем его.  
x31 = min(153,146) = 146.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | 9 | 6 | 14 | 4 | 5 |
| 2 | - | 3 | 11 | 8 | 10 | - | 6 |
| 3 | **4** | - | 14 | 11 | 5 | - | **153 - 146 = 7** |
| 4 | - | - | 13 | 6 | 16 | - | 162 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | 0 | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | **146 - 146 = 0** | 0 | 134 | 93 | 98 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=5. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 98. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

x35 = min(7,98) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | 9 | 6 | 14 | 4 | 5 |
| 2 | - | 3 | 11 | 8 | 10 | - | 6 |
| 3 | 4 | - | - | - | **5** | - | **7 - 7 = 0** |
| 4 | - | - | 13 | 6 | 16 | - | 162 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | 0 | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | 134 | 93 | **98 - 7 = 91** | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=6. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.  
x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | - | **6** | - | 4 | **5 - 5 = 0** |
| 2 | - | 3 | 11 | 8 | 10 | - | 6 |
| 3 | 4 | - | - | - | 5 | - | 0 |
| 4 | - | - | 13 | 6 | 16 | - | 162 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | 0 | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | 134 | **93 - 5 = 88** | 91 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=6. Для этого элемента запасы равны 162, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.

x44 = min(162,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | - | 6 | - | 4 | 0 |
| 2 | - | 3 | 11 | - | 10 | - | 6 |
| 3 | 4 | - | - | - | 5 | - | 0 |
| 4 | - | - | 13 | **6** | 16 | - | **162 - 88 = 74** |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | - | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | 134 | **88 - 88 = 0** | 91 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=10. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 91. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.

x25 = min(6,91) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | - | 6 | - | 4 | 0 |
| 2 | - | 3 | - | - | **10** | - | **6 - 6 = 0** |
| 3 | 4 | - | - | - | 5 | - | 0 |
| 4 | - | - | 13 | 6 | 16 | - | 74 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | - | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | 134 | 0 | **91 - 6 = 85** | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=13. Для этого элемента запасы равны 74, потребности 134. Поскольку минимальным является 74, то вычитаем его.

x43 = min(74,134) = 74.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | - | 6 | - | 4 | 0 |
| 2 | - | 3 | - | - | 10 | - | 0 |
| 3 | 4 | - | - | - | 5 | - | 0 |
| 4 | - | - | **13** | 6 | - | - | **74 - 74 = 0** |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | - | 0 | - | 145 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | **134 - 74 = 60** | 0 | 85 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 145, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x63 = min(145,60) = 60.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | - | 6 | - | 4 | 0 |
| 2 | - | 3 | - | - | 10 | - | 0 |
| 3 | 4 | - | - | - | 5 | - | 0 |
| 4 | - | - | 13 | 6 | - | - | 0 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | **0** | - | 0 | - | **145 - 60 = 85** |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | **60 - 60 = 0** | 0 | 85 | 0 |  |

Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 85, потребности 85. Поскольку минимальным является 85, то вычитаем его.

x65 = min(85,85) = 85.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | - | - | - | 6 | - | 4 | 0 |
| 2 | - | 3 | - | - | 10 | - | 0 |
| 3 | 4 | - | - | - | 5 | - | 0 |
| 4 | - | - | 13 | 6 | - | - | 0 |
| 5 | - | - | - | 3 | - | - | 0 |
| 6 | - | - | 0 | - | **0** | - | **85 - 85 = 0** |
| ПОТРЕБНОСТИ | 0 | 0 | 0 | 0 | **85 - 85 = 0** | 0 |  |

В итоге имеем

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | **15** | **5** | **9** | **6 (5)** | **14** | **4 (166)** | **171** |
| 2 | **13** | **3 (110)** | **11** | **8** | **10 (6)** | **16** | **116** |
| 3 | **4 (146)** | **8** | **14** | **11** | **5 (7)** | **14** | **153** |
| 4 | **7** | **13** | **13 (74)** | **6 (88)** | **16** | **5** | **162** |
| 5 | **6** | **14** | **12** | **3 (103)** | **13** | **7** | **103** |
| 6 | **0** | **0** | **0(60)** | **0** | **0 (85)** | **0** | **145** |
| ПОТРЕБНОСТИ | **146** | **110** | **134** | **196** | **98** | **166** |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 11, а должно быть m + n - 1 = 11. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 6\*5 + 4\*166 + 3\*110 + 10\*6 + 4\*146 + 5\*7 + 13\*74 + 6\*88 + 3\*103 + 0\*60 + 0\*85 = 3502

Улучшение опорного плана.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 6; 0 + v4 = 6; v4 = 6

u4 + v4 = 6; 6 + u4 = 6; u4 = 0

u4 + v3 = 13; 0 + v3 = 13; v3 = 13

u6 + v3 = 0; 13 + u6 = 0; u6 = -13

u6 + v5 = 0; -13 + v5 = 0; v5 = 13

u2 + v5 = 10; 13 + u2 = 10; u2 = -3

u2 + v2 = 3; -3 + v2 = 3; v2 = 6

u3 + v5 = 5; 13 + u3 = 5; u3 = -8

u3 + v1 = 4; -8 + v1 = 4; v1 = 12

u5 + v4 = 3; 6 + u5 = 3; u5 = -3

u1 + v6 = 4; 0 + v6 = 4; v6 = 4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1 = 12 | v2 =6 | v3 = 13 | v4 = 6 | v5 = 13 | v6 = 4 |
| u1 = 0 | **15** | **5** | **9** | **6 (5)** | **14** | **4 (166)** |
| u2 = -3 | **13** | **3 (110)** | **11** | **8** | **10 (6)** | **16** |
| u3 = -8 | **4 (146)** | **8** | **14** | **11** | **5 (7)** | **14** |
| u4 = 0 | **7** | **13** | **13 (74)** | **6 (88)** | **16** | **5** |
| u5 = -3 | **6** | **14** | **12** | **3 (103)** | **13** | **7** |
| u6 = 13 | **0** | **0** | **0 (60)** | **0** | **0 ( 85)** | **0** |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij

(1;2): 0 + 6 > 5; ∆12 = 0 + 6 - 5 = 1 > 0

(1;3): 0 + 13 > 9; ∆13 = 0 + 13 - 9 = 4 > 0

(4;1): 0 + 12 > 7; ∆41 = 0 + 12 - 7 = 5 > 0

(5;1): -3 + 12 > 6; ∆51 = -3 + 12 - 6 = 3 > 0

max(1,4,5,3) = 5

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 7

Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | **15** | **5** | **9** | **6 (5)** | **14** | **4 (166)** | **171** |
| 2 | **13** | **3 (110)** | **11** | **8** | **10 (6)** | **16** | **116** |
| 3 | **4 (-146)** | **8** | **14** | **11** | **5 (+7)** | **14** | **153** |
| 4 | **7 (+)** | **13** | **13 (-74)** | **6 (88)** | **16** | **5** | **162** |
| 5 | **6** | **14** | **12** | **3 (103)** | **13** | **7** | **103** |
| 6 | **0** | **0** | **0(+60)** | **0** | **0 (-85)** | **0** | **145** |
| ПОТРЕБНОСТИ | **146** | **110** | **134** | **196** | **98** | **166** |  |

икл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 74. Прибавляем 74 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 74 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | **15** | **5** | **9** | **6 (5)** | **14** | **4 (166)** | **171** |
| 2 | **13** | **3 (110)** | **11** | **8** | **10 (6)** | **16** | **116** |
| 3 | **4 (72)** | **8** | **14** | **11** | **5 (81)** | **14** | **153** |
| 4 | **7 (74)** | **13** | **13** | **6 (88)** | **16** | **5** | **162** |
| 5 | **6** | **14** | **12** | **3 (103)** | **13** | **7** | **103** |
| 6 | **0** | **0** | **0(134)** | **0** | **0 (11)** | **0** | **145** |
| ПОТРЕБНОСТИ | **146** | **110** | **134** | **196** | **98** | **166** |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 6; 0 + v4 = 6; v4 = 6

u4 + v4 = 6; 6 + u4 = 6; u4 = 0

u4 + v1 = 7; 0 + v1 = 7; v1 = 7

u3 + v1 = 4; 7 + u3 = 4; u3 = -3

u3 + v5 = 5; -3 + v5 = 5; v5 = 8

u2 + v5 = 10; 8 + u2 = 10; u2 = 2

u2 + v2 = 3; 2 + v2 = 3; v2 = 1

u6 + v5 = 0; 8 + u6 = 0; u6 = -8

u6 + v3 = 0; -8 + v3 = 0; v3 = 8

u5 + v4 = 3; 6 + u5 = 3; u5 = -3

u1 + v6 = 4; 0 + v6 = 4; v6 = 4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1 = 7 | v2 =1 | v3 = 8 | v4 = 6 | v5 = 8 | v6 = 4 |
| u1 = 0 | **15** | **5** | **9** | **6 (5)** | **14** | **4 (166)** |
| u2 = 2 | **13** | **3 (110)** | **11** | **8** | **10 (6)** | **16** |
| u3 = -3 | **4 (72)** | **8** | **14** | **11** | **5 (81)** | **14** |
| u4 = 0 | **7 (74)** | **13** | **13** | **6 (88)** | **16** | **5** |
| u5 = -3 | **6** | **14** | **12** | **3 (103)** | **13** | **7** |
| u6 = -8 | **0** | **0** | **0 (134)** | **0** | **0 ( 11)** | **0** |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 6\*5 + 4\*166 + 3\*110 + 10\*6 + 4\*72 + 5\*81 + 7\*74 + 6\*88 + 3\*103 + 0\*134 + 0\*11 = 3132

**Анализ оптимального плана.**

Из 1-го склада необходимо груз направить в 4-й магазин (5 ед.), в 6-й магазин (166 ед.)

Из 2-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (110 ед.), в 5-й магазин (6 ед.)

Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (72 ед.), в 5-й магазин (81 ед.)

Из 4-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (74 ед.), в 4-й магазин (88 ед.)

Из 5-го склада необходимо весь груз направить в 4-й магазин.

Потребность 3-го магазина остается неудовлетворенной на 134 ед.

Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x63=0.

Потребность 5-го магазина остается неудовлетворенной на 11 ед.

Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x65=0.

**Вывод.**

В ходе выполнения лабораторной работы были приобретены навыки решения открытой транспортной задачи.